

Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области
Часть 1

Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий

МГТУ имени Н.Э.Баумана, manichev@bmstu.ru

Аннотация — В первой части данной статьи приведены результаты анализа и обоснования выбора базовых методов интегрирования нелинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) при разработке нового универсального, высоконадежного программно-технического комплекса FMS-PA10 (Framework for Mathematical Simulation, Program for Analysis version 10) для моделирования систем и объектов во временной области. На примере неявного метода трапеций разработан новый комбинированный корректирующий алгоритм для реализации АL-устойчивых методов интегрирования систем ДАУ, которые будут положены в основу при разработке программно-технического комплекса FMS-PA10.

Ключевые слова:

Моделирование, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), методы интегрирования, временная область, линейные алгебраические уравнения (ЛАУ).

I. ВВЕДЕНИЕ

В статье [2] был выполнен анализ и обоснование выбора обобщенного базиса переменных для моделирования систем и объектов во временной области в качестве основы для разработки программно-технического комплекса для моделирования систем и объектов, описываемых системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), во временной области – нового универсального, высоконадежного программно-технического комплекса FMS-PA10 (Framework for Mathematical Simulation, Program for Analysis version 10). Предполагалось, что в FMS-PA10 будут использованы новые неявные АL-устойчивые методы интегрирования систем ДАУ (абсолютно (А-) устойчивые строго в левой (Left) полуплоскости области абсолютной устойчивости методов интегрирования [12]) с порядком точности выше второго, а именно неявный АL-устойчивый метод четвертого порядка точности [3]-[5]. Однако решение тестовых задач, имеющих многопериодное решение, показало, что для данного класса задач необходимо использовать АL-устойчивые методы интегрирования более высокого порядка точности (6-го, 8-го, 10-го и т.д.). Кроме того, в АL-устойчивых методах высокого порядка точности, также как и в неявном методе трапеций, возникла проблема «ложных

колебаний». В данной работе дается обоснование выбора в качестве базовых методов интегрирования систем ДАУ для программно-технического комплекса FMS-PA10 неявного метода Эйлера и библиотеки AL-устойчивых методов интегрирования 2-го, 4-го, 6-го и т.д. порядка точности. Кроме того предлагается и обосновывается новый алгоритм для решения проблемы «ложных колебаний» в неявном методе трапеций - *комбинированный корректирующий алгоритм* реализации неявного метода трапеций, основанный на идее комбинирования явной и неявной формул Эйлера [1]. Этот алгоритм будет применим и для AL-устойчивых методов интегрирования более высокого порядка точности.

II. ВЫБОР БАЗОВЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДАУ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ И ОБЪЕКТОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Моделирование систем и объектов во временной области сводится в наиболее общем случае к решению систем ДАУ, неразрешенных относительно производных и представленных в виде:

$$F(X, XP, Y, t) = 0, \quad (1)$$

где X - вектор дифференцируемых переменных размерностью m ; XP - вектор производных этих переменных по переменной t размерностью m , т.е. $XP = dX/dt$; Y - вектор алгебраических переменных размерностью k ; t - независимая переменная (обычно – время); F - вектор-функция размерностью l , где $l = m + k$. Заданы начальные условия $X_0 = X(0)$ и отрезок интегрирования.

В теоретическом плане свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и методов их решения рассматриваются применительно к линейным неоднородным системам ОДУ вида

$$dX/dt = AX + G(t), \quad (2)$$

где A — постоянная действительная матрица размером $m \times m$, $G(t)$ известная вектор-функция времени.

Если метод интегрирования будет непригоден для решения системы (2), то он будет непригоден и для решения системы (1). Обозначим определитель матрицы A через $\det(A)$. Спектр собственных значений — это множество всех собственных значений λ_i матрицы A , $i = 1, 2, \dots, m$. В общем случае λ_i — комплексные величины, т. е. $\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) + j \text{Im}(\lambda_i)$, где $j = \sqrt{-1}$. Если собственные значения λ_i - различны, то аналитическое решение системы (2) можно представить в виде суммы отдельных фундаментальных решений однородной системы ОДУ с матрицей A и частного решения неоднородной системы (2):

$$X(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t} X_i + Z(t), \quad (3)$$

где c_i - — постоянные величины; X_i — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_i ; $Z(t)$ — частное решение системы (2).

Характер фундаментальных решений системы ОДУ (2) полностью определяется собственными значениями матрицы A . Система ОДУ будет неустойчивой, если хотя бы для одного i имеем $\text{Re}(\lambda_i) > 0$. При этом i -я компонента в (3) будет неограниченно возрастать с увеличением t . Система ОДУ будет устойчивой, если $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ для всех i , так как все фундаментальные решения будут иметь затухающий характер с увеличением t . Система ОДУ будет иметь многопериодное решение, если $\text{Im}(\lambda_i) \gg \text{Re}(\lambda_i)$ для некоторых i .

В зависимости от характера переходных процессов для фундаментальных решений, показанных на рисунках Рис. 1. – Рис. 6., можно выделить 5 основных типов задач анализа, связанных с решением систем ОДУ вида (2).

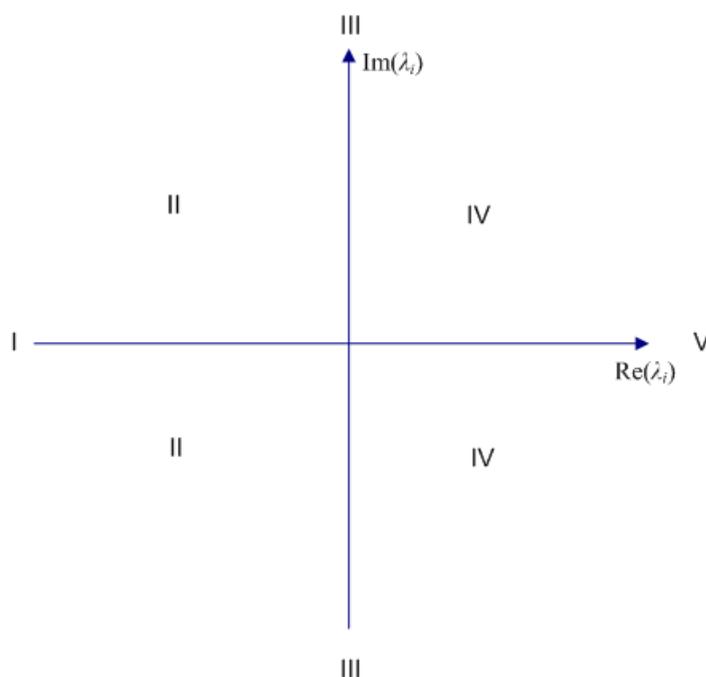


Рис. 1. Области устойчивости для 5-ти основных типов задач (I-V) при решении систем ОДУ

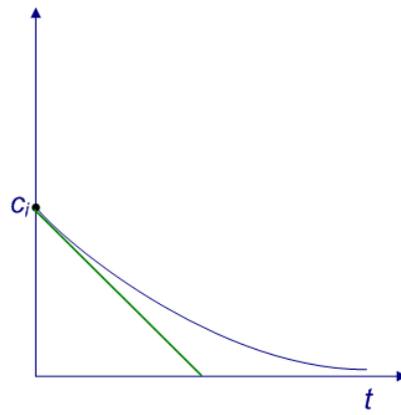


Рис. 2. Переходной процесс i -го фундаментального решения для задач типа I - фундаментальные решения лежат в основном в области I

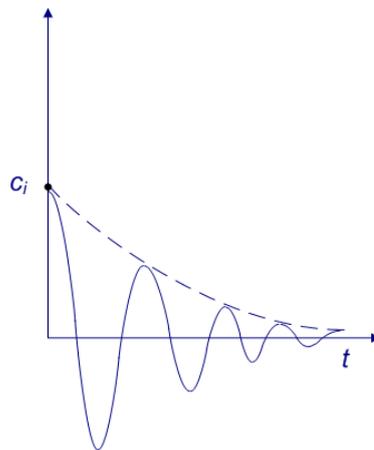


Рис. 3. Переходной процесс i -го фундаментального решения для задач типа II - фундаментальные решения лежат в основном в области II

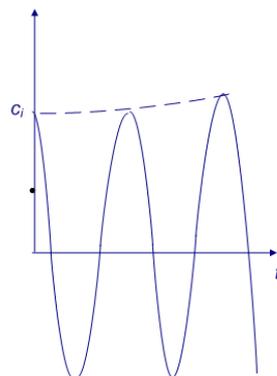


Рис. 4. Переходной процесс i -го фундаментального решения для задач типа III - фундаментальные решения лежат в основном в области III

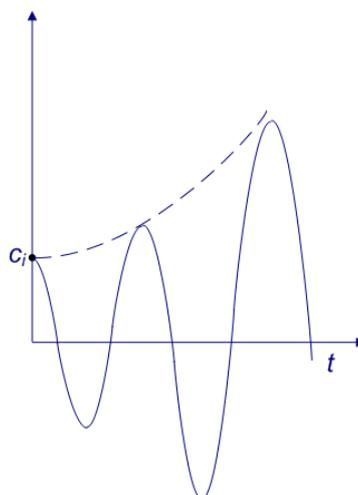


Рис. 5. Переходной процесс i -го фундаментального решения для задач типа IV - фундаментальные решения лежат в основном в области IV

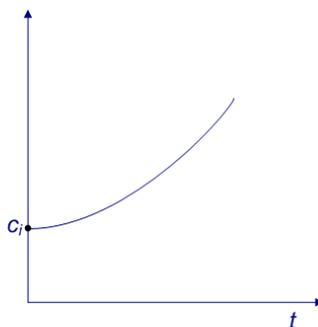


Рис. 6 Переходной процесс i -го фундаментального решения для задач типа V - фундаментальные решения лежат в основном в области V

Устойчивость методов интегрирования связана с характером изменения накопленной погрешности - если накопленная погрешность в ходе интегрирования не возрастает с увеличением числа шагов интегрирования, то используемый метод интегрирования будет численно устойчивым. Если при небольших погрешностях аппроксимации и вычислений погрешность накопления растет от шага к шагу, то используемый метод интегрирования будет численно неустойчивым при данных шагах интегрирования.

Исследование устойчивости методов интегрирования систем ОДУ и ДАУ выполняется путем решения одного модельного уравнения с постоянным шагом интегрирования h при $t \rightarrow \infty$ и сравнения численного решения с аналитическим [7]-[8]:

$$dx/dt = \lambda x, \quad x_0 = 1, \quad \lambda - \text{комплексный коэффициент.}$$

Метод интегрирования называется абсолютно устойчивым или А-устойчивым для заданного значения $h\lambda$, если численное решение модельного уравнения при $t \rightarrow \infty$ является невозрастающей величиной. Абсолютная устойчивость является естественным требованием для задач типа 1 и 2, рассмотренных выше, т.е. при $\text{Re}(h\lambda) < 0$, так как в этом случае модуль аналитического решения модельного уравнения также невозрастающая функция.

Поскольку явные методы интегрирования систем ОДУ и ДАУ не являются универсальными и не отвечают требованиям устойчивости при решении с переменным шагом интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений [4], [6], [7], [8], то в качестве базовых методов интегрирования для моделирования разнообразных систем и объектов во временной области следует выбирать неявные методы [4]-[8]. Неявные методы интегрирования ОДУ сводятся к итерационному решению систем нелинейных алгебраических уравнений. При программной реализации этих методов следует выделить два основных типа погрешностей численного решения систем ОДУ – глобальная погрешность (или качественная ошибка) и локальная погрешность (или количественная ошибка). Программисты основное внимание уделяют получению гарантированной математической локальной точности, хотя главное, конечно, это получение качественно корректного численного решения. Чтобы гарантировать получение качественно корректного решения метод интегрирования должен быть устойчивым для устойчивых систем ОДУ и должен быть неустойчивым для неустойчивых систем ОДУ, поэтому методы интегрирования должны быть АL-устойчивыми, т.е. абсолютно устойчивыми строго в левой полуплоскости комплексной плоскости устойчивости, как показано на рис. 7.

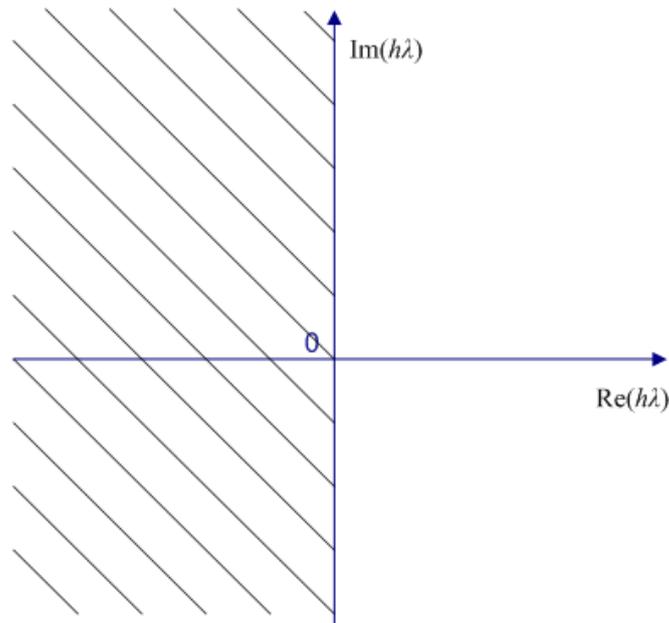


Рис. 7. Область A-устойчивости для AL-устойчивых методов интегрирования

В общем случае при решении разнообразных систем ДАУ вида (1) можно выделить 6 основных типов задач, требующих применения различных неявных методов интегрирования.

1. Решение любых систем нелинейных алгебраических уравнений методом дифференцирования по параметру или расчет статических режимов моделируемых устойчивых динамических объектов при не зависящих от времени параметрах системы ДАУ путем прямого интегрирования системы ДАУ от произвольных (чаще нулевых) начальных условий. Отрезок интегрирования выбирается от 0 до 1 (в методе дифференцирования по параметру) или из условия завершения всех переходных процессов в интегрируемой системе ДАУ. Основное требование к методу интегрирования - A-устойчивость, требования по точности не предъявляются (траектории выхода в устойчивое состояние могут быть любыми). Для задач этого типа лучшим будет применение только неявного метода Эйлера первого порядка точности без контроля локальной погрешности интегрирования.

2. Расчет устойчивых систем ДАУ с преобладанием аperiodических динамических процессов. Основное требование к методу интегрирования - A-устойчивость. Если к точности интегрирования предъявляются невысокие требования (когда погрешности в определении параметров системы ДАУ достаточно большие и требуется оценить качественно характер динамических процессов), то лучшим будет неявный метод Эйлера. При высоких требованиях к точности интегрирования лучшими для данного класса задач считаются неявные методы формул дифференцирования назад (ФДН) с переменным шагом и порядком точности интегрирования (эти методы в настоящее время используются по умолчанию в таком известном

программном комплексе для инженерного анализа механических систем как ADAMS: GSTIFF integrator (метод интегрирования Гира-Гупта (Gear-Gupta stiff method)), а также неявный метод трапеций.

3. Расчет устойчивых систем ДАУ с преобладанием периодических динамических процессов. Основное требование к методу интегрирования - А-устойчивость. При умеренных требованиях к точности интегрирования лучшим будет неявный метод трапеций, а при высоких требованиях к точности интегрирования - АL-устойчивые неявные методы 4-го , 6-го , 8-го, 10-го. т.д. порядков точности.

4. Расчет систем ДАУ с многопериодным, слабозатухающим или незатухающим решением, а также расчет систем ДАУ, которые являются периодически неустойчивыми (например, при моделировании автоколебательных систем). Основное требование к методу интегрирования – АL-устойчивость и высокий порядок точности [3]. При умеренных требованиях к точности интегрирования единственным выбором будет неявный метод трапеций. При высоких требованиях к точности интегрирования, а также в тех случаях, когда требуется с высокой точностью отобразить период и фазу колебаний, необходимо применять АL-устойчивые неявные методы 4-го , 6-го , 8-го, 10-го и т.д. порядков точности или разрабатывать специальные методы интегрирования для получения огибающих траекторий для многопериодного решения [3].

5. Расчет неустойчивых систем ДАУ с преобладанием периодических динамических процессов. Основное требование к методу интегрирования – АL-устойчивость, поэтому лучшими будут неявный метод трапеций и АL-устойчивые неявные методы 4-го , 6-го , 8-го, 10-го и т.д. порядков точности.

6. Расчет неустойчивых систем ДАУ с преобладанием аperiodических динамических процессов (например, при моделировании взрыва). Основное требование к методу интегрирования - АL-устойчивость. Лучшим будет неявный метод трапеций и АL-устойчивые неявные методы 4-го , 6-го , 8-го, 10-го и т.д. порядков точности.

Неявные методы ФДН являются одними из наиболее эффективных методов для решения систем ДАУ с преобладанием аperiodических процессов в решении, однако эта эффективность в сильной степени зависит от алгоритмической реализации этих методов, так как они имеют тенденцию к неустойчивости при сильном изменении шагов интегрирования [4], [6], [7], [8]. Анализ абсолютной устойчивости многошаговых методов интегрирования дифференциальных уравнений, к которым относится метод ФДН, показывает, что свойству А-устойчивости удовлетворяют методы, порядок точности которых не выше второго, причем среди таких методов наименьшую погрешность аппроксимации имеет только неявный метод трапеций [6].

Таким образом, в качестве базовых методов интегрирования для моделирования динамики разнообразных систем и объектов следует выбрать **неявный метод Эйлера, неявный метод трапеций и АL-устойчивые неявные методы 4-го , 6-го , 8-го, 10-го и т.д. порядков точности.**

Задачи, которые требуют применения методов интегрирования повышенного порядка точности возникают, например, в том случае, когда требуется с высокой точностью определить момент времени достижения какой-либо переменной заданного порогового значения, при расчете задач небесной механики, при расчете чувствительности выходных параметров моделируемого объекта, полученных на основе решения систем ДАУ, по отношению к изменению внутренних параметров моделируемого объекта и т.п.

Условие абсолютной устойчивости неявного метода Эйлера для модельного уравнения приводит к оценке

$$|(1 + h\lambda) < 1|.$$

Неявный метод Эйлера дает устойчивое решение в левой полуплоскости комплексной плоскости устойчивости $h\lambda$ для всех $\text{Re}(h\lambda) < 0$ и в большей части правой полуплоскости комплексной плоскости $h\lambda$, т.е. этот метод является А-устойчивым (но не является АL-устойчивым) и он идеально подходит для расчета статических состояний моделируемых систем и объектов, а при невысоких требованиях к точности подходит и для расчета динамических процессов в задачах с апериодическим характером решений. В связи с этим неявный метод Эйлера может быть использован при получении решения систем ДАУ для задач типа 1 и 2, рассмотренных выше.

Условие абсолютной устойчивости неявного метода трапеций для модельного уравнения приводит к оценке

$$|(1 + h\lambda / 2) / (1 - h\lambda / 2)| < 1.$$

Это условие выполняется строго в левой полуплоскости комплексной плоскости $h\lambda$ для всех $\text{Re}(h\lambda) < 0$ и не выполняется строго в правой полуплоскости для всех $\text{Re}(h\lambda) > 0$, т. е. метод трапеций является АL-устойчивым. В связи с этим неявный метод трапеций может быть использован при получении решения систем ДАУ для задач типа 2-6, рассмотренных выше.

Вместе с тем, при $\text{Re}(\lambda) < 0$ и $|\text{Re}(h\lambda / 2)| \gg 0$ вместо быстро затухающего аналитического решения модельного уравнения $x_n = e^{nh\lambda}$ (n - номер шага интегрирования) получим следующее численное решение этого уравнения неявным методом трапеций

$$x_n = (1 + h\lambda / 2)^n / (1 - h\lambda / 2)^n .$$

Это решение колеблется от +1 до -1 при изменении n . Такое явление получило название «ложных колебаний» (“ringing” по Kundert К. [9]) для неявного метода трапеций.

«Ложные колебания» приводят к неверным решениям для алгебраических переменных системы ДАУ и имеют место для всех АL-устойчивых методов интегрирования.

Однако неявный метод трапеций обладает следующим важным свойством - при $\lambda = j \text{Im}(\lambda)$ (модель идеального осциллятора, которой соответствует незатухающее осциллирующее решение модельного уравнения с этим значением параметра λ) устойчивому аналитическому решению модельного уравнения $|y(t_n)| = |e^{j \text{Im}(\lambda)nh}| = 1$ соответствует устойчивое численное решение модельного уравнения неявным методом трапеций

$$|y_n| = |1 + j(h \text{Im}(\lambda)/2)|^n / |1 - j(h \text{Im}(\lambda)/2)|^n = 1$$

Это свойство имеет место для всех АL-устойчивых методов интегрирования. В связи с этим неявный метод трапеций и другие АL-устойчивые методы интегрирования идеально подходят для получения решения задач типа 3-5, особенно для задач со слабозатухающими сильно осциллирующими компонентами в решении.

III. КОМБИНИРОВАННЫЙ КОРРЕКТИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЯВНОГО МЕТОДА ТРАПЕЦИЙ И ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ

Повысить эффективность неявного метода трапеций удалось путем реализации неявного метода трапеций с помощью комбинированного циклического алгоритма [11], основанного на явной и неявной формулах Эйлера. Обозначим через h_{ne} и h_{ni} соответственно значения явного и неявного шагов численного интегрирования по методу Эйлера на n -м шаге цикла алгоритма, а через $h_n = h_{ne} + h_{ni}$ — значение n -го шага цикла интегрирования, т.е. $h_n = t_n - t_{n-1}$.

В данном алгоритме для начала интегрирования требуется выполнить для $n = 0$ нулевой шаг h_0 при заданных начальных условиях $X_0 = X(0)$ по неявной формуле Эйлера. Шаг $h_0 = h_{0i}$ должен быть на много порядков меньше по величине, чем основные шаги h_n , чтобы не потерять требуемую точность интегрирования.

Комбинированный циклический алгоритм для выполнения n -го шага h_n цикла интегрирования состоит из двух основных этапов ($n = 1, 2, \dots$):

Этап 1. Выполнение явного шага $h_{ne} = h_{(n-1)e}$. Полученные значения векторов X_{ne}, XP_{ne}, Y_{ne} являются исходными для выполнения неявного шага.

Этап 2. Выполнение неявного шага, выбираемого в соответствии со стратегией автоматического выбора шага интегрирования. Полученное значение вектора X_{ni} является решением $X_n = X_{ni}$ системы (1) на n -м шаге цикла интегрирования, при этом $XP_n = XP_{ni}$ и $Y_n = Y_{ni}$.

Неявный шаг выполняется путем решения относительно векторов X_{ni}, XP_{ni}, Y_{ni} системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} XP_{ni} = (X_{ni} - X_{ne}) / h_{ni} \\ F(X_{ni}, XP_{ni}, Y_{ni}, t_n) = 0 \end{cases}$$

Обязательным условием работы алгоритма является выполнение равенства $h_{ne} = h_{(n-1)i}$, поэтому для выполнения явного шага очередного цикла алгоритма все необходимые данные имеются после выполнения неявного шага и явный шаг выполняется по формулам

$$X_{ne} = 2X_{(n-1)i} - X_{(n-1)e}, XP_{ne} = 2XP_{(n-1)i} - XP_{(n-1)e}, Y_{ne} = 2Y_{(n-1)i} - Y_{(n-1)e}.$$

Тестирование данного алгоритма показало, что все основные свойства неявного метода трапеций сохраняются при значительном ослаблении «ложных колебаний». В результате для оценки погрешности интегрирования применим способ полиномиальной аппроксимации [1] (в классическом методе трапеций для оценки погрешности интегрирования на каждом шаге интегрирования применяется более трудоемкий метод двойного расчета с половинным шагом интегрирования - метод Рунге [6]-[8]). Рассмотренный алгоритм соответствует неявному методу трапеций по точности и устойчивости и может быть использован в качестве базового алгоритма для реализации неявного метода трапеций, однако полностью «ложные колебания» этот алгоритм не устраняет. Дальнейшее развитие данного алгоритма (**комбинированный корректирующий алгоритм**) позволило решить проблему «ложных колебаний».

Решение большого количества практических задач показало, что «ложные колебания» появляются только при интегрировании функций, имеющих разрывы производных этих функций по времени (в основном при наличии кусочно-линейных функций, зависящих от времени). Для разработки нового алгоритма, устраняющего «ложные колебания», была выбрана тестовая задача Кокина С.А.: численное интегрирование дифференциальных уравнений емкостного делителя, когда одна из емкостей является функцией напряжения на обкладках соответствующего конденсатора (рис. 8.).

На рис. 8. $C1$ - постоянная емкость, равная 1 (не зависит от напряжения на обкладках), $C2$ - выражена удобной для получения аналитического решения функцией $C2 = C1 \cdot (0,5 - U_{C2})$.

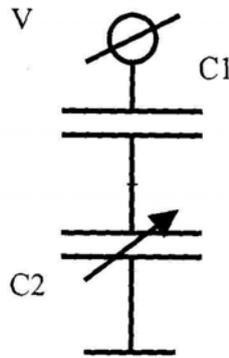


Рис. 8. Тестовая задача Кокина

Для удобства выбран пилообразный входной сигнал от 0В до 1В (толстые линии на рис. 9.), подаваемый на источник напряжения V с периодом $t_1=2$ сек.

Необходимо получить численное решение для напряжения на емкости C_2 , которое должно совпадать с аналитическим решением, показанным тонкими линиями на рис. 9.

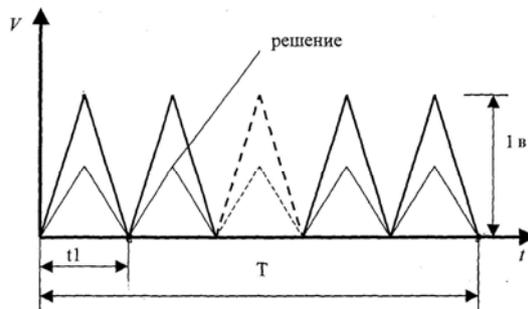


Рис. 9. Входной сигнал на источнике напряжения $V(t)$ и аналитическое решение

Математической моделью этой тестовой задачи будет система ДАУ вида (1) из трех уравнений:

$$\begin{cases} C1(dU_{C1}(t)/dt) - i(t) = 0 \\ C1(0.5 - U_{C2}(t)) \times (dU_{C2}(t)/dt) - i(t) = 0, \\ U_{C1}(t) + U_{C2}(t) - V(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

относительно трех переменных $U_{C1}(t)$, $U_{C2}(t)$, $i(t) = i_{C1}(t) = i_{C2}(t)$. Аналитическое решение этой задачи (в модели все переменные рассматриваются безразмерными) для напряжения на емкости C_2 при начальных условиях $U_{C1}(0) = 0$ и $U_{C2}(0) = 0$ имеет вид:

$$U_{C2}(t) = C1 + C2(0) - \sqrt{(C1 + C2(0))^2 - 2 \cdot C1 \cdot V(t)}$$

На рис. 10. приведен скриншот графика численного решения напряжения на емкости C_2 при интегрировании системы ДАУ (4) для случая классической реализации неявного метода трапеций, которое полностью совпало с аналитическим решением.

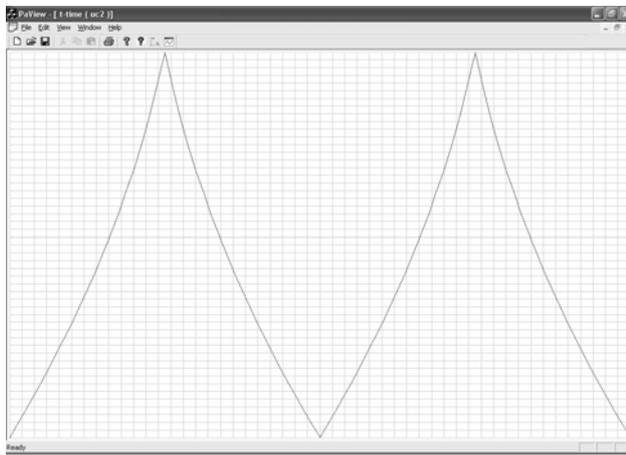


Рис. 10. Скриншот для численного решения $U_{C2}(t)$

На рис. 11. приведен скриншот графика зависимости тока $i_{C2}(t)$, который значительно отличается от аналитического решения:

$$i_{C2}(t) = \frac{C1 \cdot (0.5 - U_{C2}(t))}{\sqrt{(C1 + C2(0))^2 - 2 \cdot C1 \cdot V(t)}}.$$

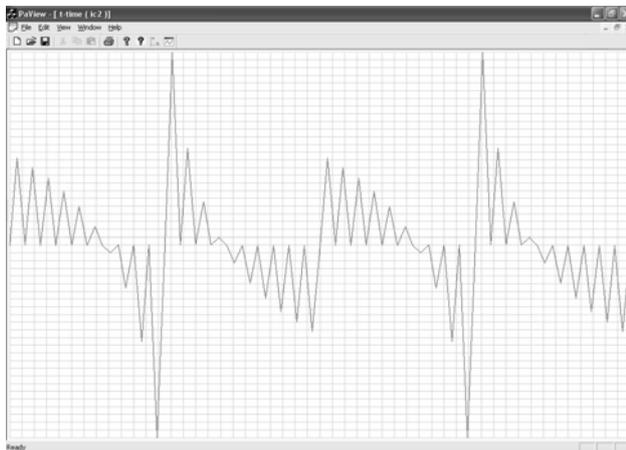


Рис. 11. Скриншот для численного решения $i_{C2}(t)$ неявным методом трапеций

Этот пример наглядно демонстрирует проблему «ложных колебаний» для неявного метода трапеций и других АL-устойчивых неявных методов 4-го, 6-го, 8-го, 10-го и т.д. порядков точности. Как отмечено выше, основной причиной появления «ложных колебаний» является наличие разрывов производных по времени в интегрируемых функциях (в данном примере это функция $V(t)$). Моменты времени разрыва производных либо известны (в данном случае через каждые 1 сек.), либо их можно определить, поэтому первоначально была сделана попытка разбить отрезок интегрирования на отдельные «подотрезки» между моментами разрыва производных и интегрировать дифференциальные уравнения на этих «подотрезках» с последовательной передачей данных между «подотрезками». В пределах «подотрезка» гарантируется непрерывность всех интегрируемых функций и их производных, однако, даже начиная интегрирование на каждом «подотрезке» с минимальным шагом интегрирования, не удалось решить проблему «ложных колебаний».

В результате большого количества численных экспериментов выяснилось, что фактической причиной появления «ложных колебаний» является возможный идеальный скачок производных дифференцируемых и алгебраических переменных в конце шага численного интегрирования h_n (даже при $h_n \rightarrow 0$), т.е. возможный скачок значений отдельных элементов вектора XP и вектора Y , вызываемый разрывом производных у интегрируемых функций в начале (как в рассматриваемом примере) или в пределах текущего шага численного интегрирования h_n . Для неявного метода трапеций величина этих скачков значительно отличается от точных значений (даже при $h_n \rightarrow 0$), приводя к «ложным колебаниям». В то же время точное значение этих скачков теоретически можно получить в конце шага интегрирования h_n с помощью неявного метода Эйлера при $h \rightarrow 0$, т.к. при $h \rightarrow 0$ выполнение такого шага будет эквивалентно решению в конце шага интегрирования системы нелинейных алгебраических уравнений $F(X, XP, Y, t) = 0$ $(m+k)$ -го порядка относительно векторов XP и Y при фиксированном значении вектора X . Использование корректирующего шага $h \rightarrow 0$ по неявному методу Эйлера при наличии разрыва производных дифференцируемых функций на соответствующем шаге интегрирования h_n в конце этого шага интегрирования решило проблему «ложных колебаний» и позволило разработать комбинированный корректирующий алгоритм реализации неявного метода трапеций.

Комбинированный корректирующий алгоритм состоит из нулевого шага h_0 по неявному методу Эйлера при заданных начальных условиях $X_0 = X(0)$ аналогично комбинированному циклическому алгоритму и следующих основных этапов:

Этапы 1 и 2 аналогичны соответствующим этапам комбинированного циклического алгоритма.

Этап 3. Если в начале или в пределах текущего шага h_n присутствуют моменты времени, соответствующие разрывам производных интегрируемых функций, то выполняется коррекция значений векторов XP_n и Y_n . Для этого выполняется корректирующий шаг интегрирования h_{nadj} много меньший шага h_n по неявной формуле Эйлера путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} XP_{nadj} = (X_{nadj} - X_n) / h_{nadj} \\ F(X_{nadj}, XP_{nadj}, Y_{nadj}, (t_n + h_{nadj})) = 0 \end{cases}$$

и вычисления векторов X_{nadj} , XP_{nadj} и Y_{nadj} , затем вычисляются скорректированные значения векторов XP_n и Y_n (вектор X_n не изменяется!):

$$XP_n = XP_{nadj}, Y_n = Y_{nadj}.$$

На рис. 12. приведен скриншот графика численного решения тока на емкости C_2 для рассматриваемой задачи при интегрировании системы ДАУ (4) неявным методом трапеций, который был реализован с использованием комбинированного корректирующего алгоритма. Это решение полностью совпало с аналитическим решением.

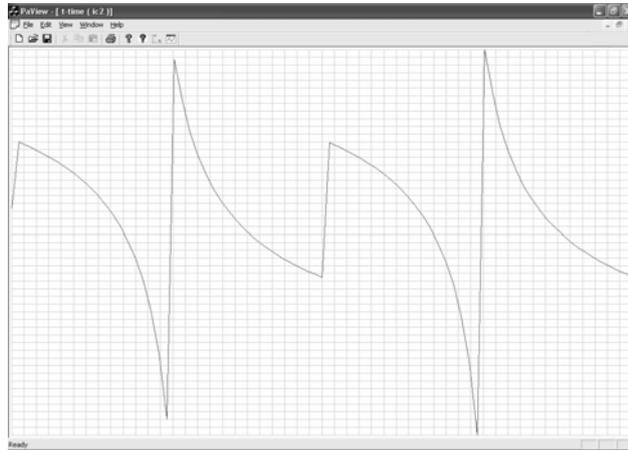


Рис. 12. Скриншот численного решения для тока $i_{C_2}(t)$, полученного с помощью комбинированного корректирующего алгоритма

Особенностью всех разностных формул неявного интегрирования ОДУ является деление на шаг интегрирования h . В работе [2] показано, что если программировать эти формулы в классическом виде, взятом из учебников, то шаг не должен быть меньше машинной точности вычислений, равной $1E-8$ для одинарной и $1E-16$ для удвоенной точности вычислений. При меньших значениях шага h программы интегрирования, реализующие неявные методы интегрирования, могут выдавать качественно неверное решение, что отмечено в работе [10]. В работе [5] предложен метод решения этой проблемы, а в дальнейшем была разработана программа DMAN, реализующая этот метод, а также реализующая корректирующий алгоритм для AL-устойчивых методов 2-го и 4-го порядков точности. Для тестирования того, как в программах, реализующих неявные методы интегрирования, решена эта проблема, надо выполнять согласованное изменение параметров систем ОДУ таким образом, чтобы переменные и шаги интегрирования изменялись в максимально возможных пределах разрядной сетки процессора при сохранении качественно корректных результатов интегрирования. Принципы согласованного изменения параметров системы ОДУ изложены в [5] и выполнялись на примере расчета линейной электрической схемы с известным аналитическим решением (RLC: high Q filter – рис.1 в [5]). В таблице 1 приведены результаты тестирования по данному методу программы DMAN и наиболее известных программ, в которых реализованы неявные методы интегрирования: Radau-MathCAD (версия 2007 г.), ode15s-MATLAB (версия 2007 г.) и Rosenbrock-Maple (версия 2007 г.). В этой таблице приведены полученные диапа-

зоны значений масштабных коэффициентов, предложенных в [5], для которых результаты расчета этой схемы еще совпадают с эталонным, аналитическим решением (порядок масштабных коэффициентов при тестировании не задавался более 250 по абсолютной величине). За пределами приведенных значений программы MathCAD, MATLAB и Maple часто выдают качественно неверный результат без каких либо сообщений [13].

Таблица 1.

Масштабные коэффициенты Ki, Ku, Kt				
Решатели ОДУ	Radau-MathCAD	ode15s-MATLAB	Rosenbrock-Maple	DMAN
$Ki=1, Ku=1$	$10^{-2} < Kt < 10^{250}$	$10^{-80} < Kt < 10^{250}$	$10^{-103} < Kt < 10^{250}$	$10^{-250} < Kt < 10^{250}$
$Kt=1, Ku=1$	$10^{-250} < Ki < 10^{250}$	$10^{-250} < Ki < 10^2$	$10^{-250} < Ki < 10^{250}$	$10^{-250} < Ki < 10^{250}$
$Kt=1, Ki=1$	$10^{-2} < Ku < 10^{250}$	$10^{-1} < Ku < 10^7$	$10^{-250} < Ku < 10^{250}$	$10^{-250} < Ku < 10^{250}$

В таблице приведены диапазоны значений масштабных коэффициентов по времени, току и напряжению - Kt, Ki, Ku , для которых результаты расчета тестовой -задачи еще совпадают с эталонным, аналитическим решением.

Продолжение статьи в следующем номере журнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы автоматизированного проектирования: Учебное пособие для вузов: в 9 кн./Под ред. И.П.Норенкова. - М.: Высшая школа, 1986.
2. Жук Д.М., Маничев В.Б., Папсуев А.Ю. Обобщенный метод моделирования динамики технических систем // Информационные технологии. - 2004. - №8. - С. 6-14.
3. Норенков И.П., Евстифеев Ю.А., Маничев В.Б. Адаптивный метод ускоренного анализа многопериодных электронных схем // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1987, № 6. – С. 35-39.
4. Маничев В.Б. Уваров М.Ю. Базовые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для программ анализа радиоэлектронных схем // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1989. - Т. 32. - №6. - С. 45-49.
5. Маничев В.Б. Новые алгоритмы для программ анализа динамики технических систем // Вестник МГТУ, сер. Приборостроение. -1996. - Вып. 1. - С. 48-56.
6. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1988. - 334 с.
7. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 512 с.
8. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи: Пер. с англ. -М.: Мир, 2001. - 498 с.
9. Kundert K. The designer's guide to SPICE and Spectre. - Kluwer Academic Publisher. – 1995. - 371 с.
10. Л. М. Скворцов, Явный многошаговый метод численного решения жестких дифференциальных уравнений// Журнал вычислительной математики и математической физики. том 47, № 6, Июнь 2007, С. 959-967.
11. Норенков И.П., Жук Д.М., Маничев В.Б., Трудоношин В.А. Анализ электронных схем при совместном применении явных и неявных методов интегрирования // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1979. - Т. 22. - №6. - С. 25-28.
12. Евстифеев Ю. А., Маничев В. Б. Эффективный А-устойчивый метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для программ анализа электронных схем//Изв. вузов. Радиоэлектроника.-1986.-Т.29-№ 11 – С. 31-35.
13. Маничев В.Б. «Метод тестирования программ, реализующих неявные методы интегрирования ОДУ», тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» - Самарский-2009, Москва, МГУ имени Ломоносова, июнь 2009, С. 76.