УДК 621.382.82.001

Жук Д.М., Маничев В.Б., Родионов С.В.
МГТУ им. Н.Э.Баумана

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ PA10

Аннотация

Аннотация

Основной недостаток известных программ численного моделирования динамических систем, например, MATLAB-SIMULINK, состоит в получении неверного ре-зультата численного моделирования динамических систем при невысоких заданных требова-ниях к математической точности конечных результатов численного моделирования динамических систем. Невысокие требования к математической точности решения математических моделей динамических систем объясняются тем, что исходные внутренние параметры дина-мических систем, как правило, получены с невысокой математической точностью. В данной статье рассмотрены методы, алгоритмы и программа ПА10 (SADEL-PA10), устраняющие этот недостаток. Приведены результаты соответствующих численных экспериментов. Рассмотрено решение двух «трудных» задач с помощью программы-прототипа ПА10 – PA10mini.

Реферат

Основной недостаток известных программных продуктов для численного моделирования динамических систем, например, MATLAB-SIMULINK, MapleSim, WolframSystemModeler и др. состоит в получении неверного, часто правдоподобного, результата численного моделирования динамических систем при невысоких заданных требованиях к математической точности результатов численного решения систем ОДУ, моделирующих динамические системы. Невысокие требования к математической точности результатов решения систем ОДУ объясняются тем, что параметры математических моделей динамических систем и, следовательно, коэффициенты соответствующих систем ОДУ, получены, как правило, экспериментально с невысокой математической точностью.

Кроме того, следует учитывать технологический разброс параметров и вариации параметров в ходе эксплуатации проектируемых изделий. В статье обосновывается применение A(π/2)-устойчивых (AL-устойчивых) методов решения систем ОДУ, направленное на устранение вышеуказанного недостатка. Рассмотрены алгоритмы и программная реализация данных методов для расширенного координатного базиса фазовых переменных, включающего кроме переменных состояния также производные этих переменных и алгебраические переменные. Все переменные рассчитываются с гарантированной достоверностью и точностью результатов решения (обеспечиваемом AL-устойчивыми методами интегрирования систем ОДУ) и с одинаковой математической и компьютерной точностью для всех переменных расширенного координатного пространства переменных на каждом шаге интегрирования. Программы ориентированы в первую очередь на решение жестких и сверхжестких систем ОДУ с многопериодным характером решения. Приведены результаты соответствующих численных экспериментов. Рассмотрено решение двух «трудных» задач с помощью программы-прототипа ПА10 – PA10mini.

Ключевые слова (на русском и английском языках):

Численное моделирование, динамические системы, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), методы интегрирования, линейные алгебраические уравнения (ЛАУ).

Simulation, Dynamic Systems, Ordinary Differential Equations (ODE), Differential Algebraic Equations (DAE), integration methods, Linear Algebraic Equations (LAE).

Введение

Научно-исследовательские работы по математическому и численному моделированию динамических систем выполняются преподавателями, аспирантами, сотрудниками и студентами кафедры РК-6 (САПР) МГТУ им. Н.Э.Баумана с 1974 года (первоначально эти работы выполнялись под руководством д.т.н, профессора Норенкова И.П. для математического и компьютерного моделирования электронных схем). Были разработаны ПМК ПА1-ПА9 для численного моделирования динамических систем. При программной реализации численных методов решения систем ОДУ-ДАУ (при разработке математических ядер этих ПМК) следует выделить два основных типа погрешностей численного решения систем ОДУ-ДАУ – глобальная погрешность (или качественная ошибка) и локальная погрешность (или количественная ошибка). Математики-программисты основное внимание уделяют оценке математической локальной погрешности интегрирования (обычно используя метод Рунге или методы, основанные на предсказании-коррекции (prediction-correction methods)), хотя главное, - это получение качественно достоверного и корректного численного решения систем ОДУ-ДАУ. В работе [1] было показано, что для гарантии получения качественно корректного решения разнообразных систем ОДУ при контроле только локальной погрешности интегрирования численный метод решения систем ОДУ должен быть AL-устойчивым, т.е. абсолютно (A-) устойчивым строго в левой (L-Left) полуплоскости комплексной плоскости устойчивости методов численного решения систем ОДУ-ДАУ. В работе [2] на основе Паде аппроксимации экспоненты в конечную дробь и использования многочленов Якоби были получены коэффициенты AL-устойчивых неявных методов интегрирования систем ОДУ-ДАУ 2-го, 4-го и 6-го порядков точности. Программная реализация этих методов сводится к многократному получению матриц Якоби для решаемой системы ОДУ-ДАУ и решению соответствующих систем ЛАУ на каждом шаге интегрирования, что, как правило, приводит к нескольким тысячам и более обращений к программе-решателю систем ЛАУ (LAE solver) на всем заданном отрезке интегрирования системы ОДУ-ДАУ. Эти AL-устойчивые неявные методы интегрирования систем ОДУ-ДАУ 2-го и 4-го порядков точности были реализованы в составе библиотеки SADEL при использовании удвоенной точности вычислений на языке Си [3]. Библиотека SADEL (Sets of Algebraic and Differential Equations solvers Library) – библиотека решателей для систем алгебраических и дифференциальных уравнений, предназначенная для решения систем ЛАУ и систем ОДУ-ДАУ. Библиотека SADEL на языке Си является математическим ядром платформы компьютерного моделирования динамических процессов для разнородных (multiphysics, multi-discipline) технических систем и объектов - ПМК ПА10 (SADEL-PA10)), превосходящем математические ядра подобных зарубежных ПМК - MATLAB-SIMULINK, Maple-MapleSim, Mathematica-SystemModeler, C-Library NAG в части решения жестких систем ОДУ и плохо-обусловленных систем ЛАУ при невысоких требованиях к математической точности результатов численного моделирования, что показано в работах [4, 5]. Конечная математическая и компьютерная точность численного моделирования динамических систем может быть невысокой, т.к. исходные внутренние параметры моделируемых систем получают с невысокой математической и компьютерной точностью (и соответствующие коэффициенты в уравнениях систем ОДУ-ДАУ), поэтому, по умолчанию, математическая точность решения систем ОДУ-ДАУ по умолчанию задается невысокой (*eps*=0.001 в MATLAB). Решение с данным параметром *eps* большого количества тестовых и практических задач математического и численного моделирования динамических систем с помощью библиотеки SADEL и других библиотек и ПМК показало, что для получения качественно достоверного и корректного решения жестких и сверхжестких систем ОДУ-ДАУ необходимо на всех шагах численного интегрирования обеспечивать численное решение соответствующих плохо обусловленных систем ЛАУ с повышенной (на два разряда, по сравнению с заданной) точностью вычислений для всех значений элементов вектора решения систем ЛАУ [6]. Также были определены два основных недостатка известных ПМК моделирования динамических систем (на примере ПМК MATLAB-SIMULINK):

1. Возможное получение неверного результата численного моделирования динамических систем (особенно для сверхжестких систем ОДУ-ДАУ) при невысоких заданных требованиях к математической точности интегрирования систем ОДУ-ДАУ (по умолчанию параметр eps=0.001 в ПМК MATLAB-SIMULINK).
2. Ориентация на математиков-программистов и инженеров-расчетчиков высшей квалификации по численным методам решения систем ОДУ-ДАУ, знающих математический английский язык (ПМК MATLAB-SIMULINK не локализуется).

В разрабатываемом ПМК ПА10 (SADEL-PA10) планируется устранение этих недостатков.

Обоснование принципов разработки ПМК ПА10 (SADEL-PA10)

В известных программах-решателях систем ОДУ-ДАУ (ODE-DAE Solvers) используются три классические постановки задач решения систем ОДУ-ДАУ.

1) Нормальная форма Коши в координатном базисе дифференциальных переменных состояния (явная форма представления систем ОДУ-ДАУ):

$$dX/dt = F(X,t) \quad ,$$

где X - вектор координатного базиса дифференциальных переменных состояния размерностью m. F - вектор-функция правых частей системы ОДУ размерностью m, t – независимая переменная (обычно время). Заданы начальные условия $X_0=X(0)$ и отрезок интегрирования $t=[T0,TK]$, $T0$ – заданное время начала интегрирования, TK – заданное время окончания интегрирования.

2) Дифференциально-алгебраическая форма разных индексов в полном координатном базисе дифференциально-алгебраических переменных (полуявная форма):

$$\begin{cases} dX/dt = F(X,Y,t) \\ G(X,Y) = 0 \end{cases} \quad ,$$

где Y - вектор алгебраических переменных полного координатного базиса дифференциально-алгебраических переменных размерностью k. G - вектор-функция размерностью k. Заданы согласованные начальные условия: $X_0=X(0)$, $Y_0=Y(0)$ и отрезок интегрирования $t=[T0,TK]$.

3) Дифференциально-алгебраическая форма в полном координатном базисе дифференциально-алгебраических переменных (неявная форма):

$$G(X, dX/dt, Y, t) = 0 \qquad dX/dt = F(X,t)$$

где G - вектор-функция размерностью $m + k$. Заданы согласованные начальные условия и отрезок интегрирования. Задача решения систем ОДУ-ДАУ в данной постановке была поставлена в полном координатном базисе дифференциально-алгебраических переменных Линдой Петзольд и ее научным руководителем, известным математиком Гиром в 1982 г. и была разработана программа DASS (Differential Algebraic Systems Solver) на основе метода BDF (Backward Differential Formula), заменой в вышеприведенной формуле вектора производных по формулам Гира $dX/dt = BDF(X,h)$ и решением на каждом шаге интегрирования замкнутой системы нелинейных алгебраических уравнений (НАУ) $G(X,Y)=0$ относительно дифференциально-алгебраических переменных X и Y [7].

Программа-решатель систем ДАУ (DAE Solver) в ПМК ПА10 (SADEL-PA10), рассматривает системы ДАУ в еще более **расширенном координатном пространстве переменных**, в котором к дифференциально-алгебраическим переменным добавлены **производные дифференциальных переменных**. Задача решения систем ДАУ в расширенном координатном пространстве переменных в отличие от классических постановок будет не доопределена по отношению к векторам неизвестных:

$$G(PX, X, Y, t) = 0, \qquad (1)$$

где $PX=dX/dt$ - вектор производных дифференциальных переменных по времени для расширенного координатного пространства переменных размерностью m. G - вектор-функция размерностью $m + k$. Заданы начальные условия $X_0=X(0)$ и отрезок интегрирования $t=[T0,TK]$. Новые алгоритмы для решения системы (1) основаны на совместном решении систем НАУ $G_i(X,Y,PX,t_i)=0$ и **систем из m алгебраических уравнений численного интегрирования $H_i(X,PX,h)=0$**, которые доопределят систему (1) на соответствующих стадиях методов интегрирования, относительно векторов дифференциально-алгебраических переменных X, Y и производных дифференциальных переменных PX [3]. Параметры алгебраических уравнений численного интегрирования $H_i(X,PX,h)=0$ были получены на основе анализа 5-ти базовых классов задач для фундаментальных решений линейных неоднородных систем ОДУ [2]. При невысокой математической точности интегрирования шаг интегрирования может стать таким большим, что **не AL-устойчивые методы интегрирования могут попасть в область устойчивости, не соответствующей некоторым фундаментальным решениям**. Область абсолютной устойчивости **AL-устойчивых** методов интегрирования показана на рис.1.

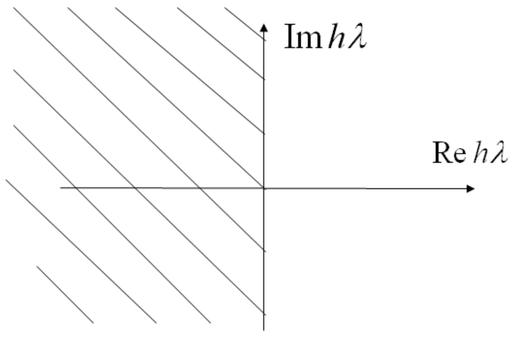

Рис. 1.Область абсолютной устойчивости (заштрихована) AL-устойчивых методов интегрирования

Были разработаны системы из ***m*** **линейных алгебраических уравнений численного интегрирования** $\boldsymbol{H_i(X,PX,h)=0}$ *S*-стадийных неявных методов интегрирования систем ДАУ вида (1) в расширенном координатном пространстве дифференциально-алгебраических переменных и производных дифференциальных переменных *X*, *Y* и *PX*-DAbc методы**,** как развитие Ab^{T}c методов Бутчера [3]:

$$
\begin{aligned}
&H_i(PX_i, X_i, X_{n-1}, PX_{n-1}, h_n) = \\
&= h_n \sum_{j=1}^{s} d_{ij} PX_j - \sum_{j=1}^{s} a_{ij} X_j - b_i X_{n-1} - h_n c_i PX_{n-1} = 0 \\
&X_n = X_s, PX_n = PX_s, i = 1,\dots,s, t_n = t_s, \\
&s - \text{число стадий}, \\
&h_n = (t_n - t_{n-1}) - n - \textit{й шаг интегрирования}, \\
&d_{ij}, a_{ij}, b_i, c_i - \quad \text{параметры метода.}
\end{aligned}
$$

Эти алгебраические уравнения численного решения систем ОДУ-ДАУ **не требуют получения «правой» части системы ОДУ-ДАУ** (**вектор-функции *F*** в известных формулах численного решения систем ОДУ-ДАУ). На основе этих алгебраических уравнений численного решения систем ОДУ-ДАУ были определены параметры и реализованы три метода интегрирования [5,6]:

M1 - A-устойчивый неявный метод первого порядка точности (совпадает по параметрам с неявным методом Эйлера);

M2 – AL-устойчивый неявный метод второго порядка точности (совпадает по параметрам с неявным методом трапеций);

M3 - AL-устойчивый неявный метод четвертого порядка точности (совпадает по параметрам с неявным методом Лобатто IIIA [10])

Для достоверного численного моделирования динамических систем необходимо обеспечить достоверность численного решения систем ОДУ-ДАУ, но при программной реализации численных методов решения систем ОДУ-ДАУ можно контролировать только локальную погрешность интегрирования (вышеупомянутый параметр eps в программах численного решения систем ОДУ-ДАУ), но при невысоких требованиях к математической точности интегрирования (eps=0.001) возможно получение не достоверного численного решения.

Точность решения систем ОДУ-ДАУ в методах M2-M3 обеспечивается контролем локальной погрешности используемого метода интегрирования, а достоверность обеспечивается AL-устойчивостью данных методов интегрирования. В результате выполненных научных исследований были решены две кардинальные проблемы реализации вышеприведенных AL-устойчивых S–стадийных DAbc методов интегрирования:

1. Главный недостаток AL-устойчивых методов состоял в наличии «ложных (паразитных) колебаний» (“ringing”) при больших шагах интегрирования. В книгах [10, 11, 12, 13] для жестких систем ОДУ-ДАУ это свойство методов интегрирования называется нежелательным, поэтому эти методы не нашли широкого применения на практике. Решение данной проблемы изложено в статье [14] – алгоритм Маничева-Ильницкого.

2. Проблема решения систем ЛАУ с повышенной точностью вычислений (extra precision calculations). Данная проблема подробно описана в статье [7] и была решена с помощью метода Arbitrary Precision Arithmetic в рамках библиотеки SADEL [5,6].

Результаты численных экспериментов

Классические постановки задач решения систем ЛАУ ориентированы на получение решения для любых невырожденных систем ЛАУ и не гарантируют компьютерной точности в 15 верных значащих цифр для всех элементов вектора неизвестных, особенно для плохо обусловленных систем ЛАУ с числом обусловленности многим больше 1. Постановка задачи решения систем ЛАУ с повышенной точностью для программ библиотеки SADEL отличается от классических требованием гарантированного получения решений с точностью в 15 верных значащих цифр (удвоенная точность double precision на языке Си) для всех элементов вектора решений систем ЛАУ. Сравнение программ-решателей систем ЛАУ приведено и сравнение программ-решателей систем ОДУ-ДАУ с решателем М3 библиотеки SADEL при невысоких требованиях к точности интегрирования (*eps*=0.001) [5,6].

Был разработан прототип ПК ПА10 – программа PA10mini.

Программа PA10mini предназначена для освоения основ математического и численного моделирования динамических систем, математические модели которых описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а также для решения не сложных систем ОДУ в нормальной форме Коши или систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) в общем виде (систем ОДУ-ДАУ) и предоставляет студенту два альтернативных варианта интерфейса: редактор ввода систем ОДУ-ДАУ в текстовом виде и схемный редактор формальных схем с ненаправленными связями на основе математических моделей двухполюсников.

Эффективность численного решения систем ОДУ в значительной степени определяется спектром матрицы Якоби системы ОДУ. Сложность задачи можно оценить величиной ρT , где ρ - спектральный радиус матрицы Якоби, T - величина интервала интегрирования. Трудности возникают при больших значениях ρT (больше 103). В зависимости от расположения наибольших по модулю собственных значений такие «трудные» задачи подразделяются на жесткие (наибольшие собственные значения в левой полуплоскости), быстро осциллирующие (вблизи мнимой оси) и локально-неустойчивые (в правой полуплоскости). В SPICE симуляторах реализованы неявные методы интегрирования, поэтому жесткие задачи будут «легкими». Тестовые задачи второго и третьего типа будут «трудными» для SPICE симуляторов, поэтому далее рассматриваются только такие «трудные» тестовые задачи.

Примеры решения двух «трудных» тестовых задач с помощью PA10mini .

Тест 1 Ван дер Поля

Пример расчета жесткой системы ОДУ 2-го порядка (MU – параметр жесткости) – тест Ван дер Поля.

$$dx_1 / dt = x_2$$
$$dx_2 / dt = -x_1 + MU \cdot (1 - \mathrm{x}_1^2) \cdot \mathrm{x}_2$$

Начальные условия:

$$x_1(0) = -1,$$
$$x_2(0) = 1$$
$$t \in (0, 8.4 \cdot MU)$$

На практике встречаются значения жесткости $MU = 10^6$ и $MU = 10^9$, на рис. 2 приведено решение для значения жесткости $MU = 10^6$.

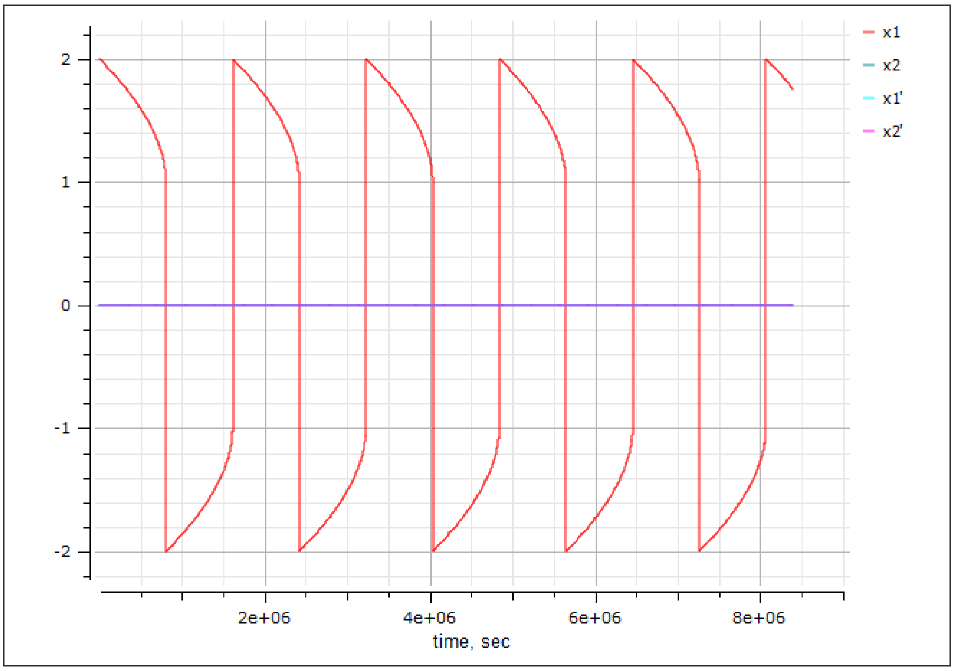

Рис. 2 Решение теста 1 для значения жесткости $MU = 10^6$

Большинство математических программ дает неверное решение для данной задачи.

Тест 2 RLC-цепь

Пример моделирования электронной схемы (рис.3) с многопериодным решением.

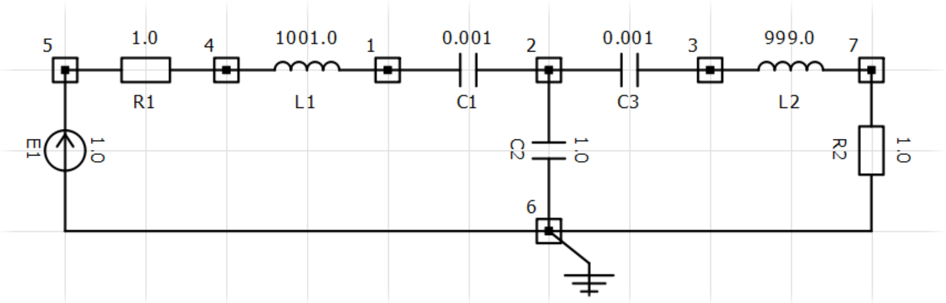

Рис. 3 Электронная схема для теста 2.

Система ОДУ для ТЕСТА 2

$$kr = ku / ki, kc = kt \cdot ki / ku, kl = kt \cdot ku / ki$$
$$dx_1 / dt = x_4 / 0.001 \cdot kc$$
$$dx_2 / dt = x_5 / 0.001 \cdot kc$$
$$dx_3 / dt = (x_4 - x_5) / kc$$
$$dx_4 / dt = (ku - x_1 - x_3 - kr \cdot x_4) \cdot / 1001 \cdot kl$$
$$dx_5 / dt = (-x_2 + x_3 - kr \cdot x_5) / 999 \cdot kl$$
$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, x_5(0) = 0$$
$$t \in (0{,}12560 \cdot kt)$$

Система ОДУ сгенерированная программой PA10mini по схеме имеет вид:

uR1=iR1*1.0

uR1=-phi1+phi5

uL1=iL1'*1001.0

uL1=phi1-phi2

iC1=uC1'*0.001

uC1=phi2-phi3

iC2=uC2'*1.0

uC2=phi3

iC3=uC3'*0.001

uC3=phi3-phi4

uL2=iL2'*999.0

uL2=phi4-phi7

uR2=iR2*1.0

uR2=phi7

uE1=1.0

uE1=phi5

-iR1+iL1=0

-iL1+iC1=0

-iC1+iC2+iC3=0

-iC3+iL2=0

iR1+iE1=0

-iL2+iR2=0

Результаты расчета выходного значения Uвых (phi7) приведены на рис. 4.

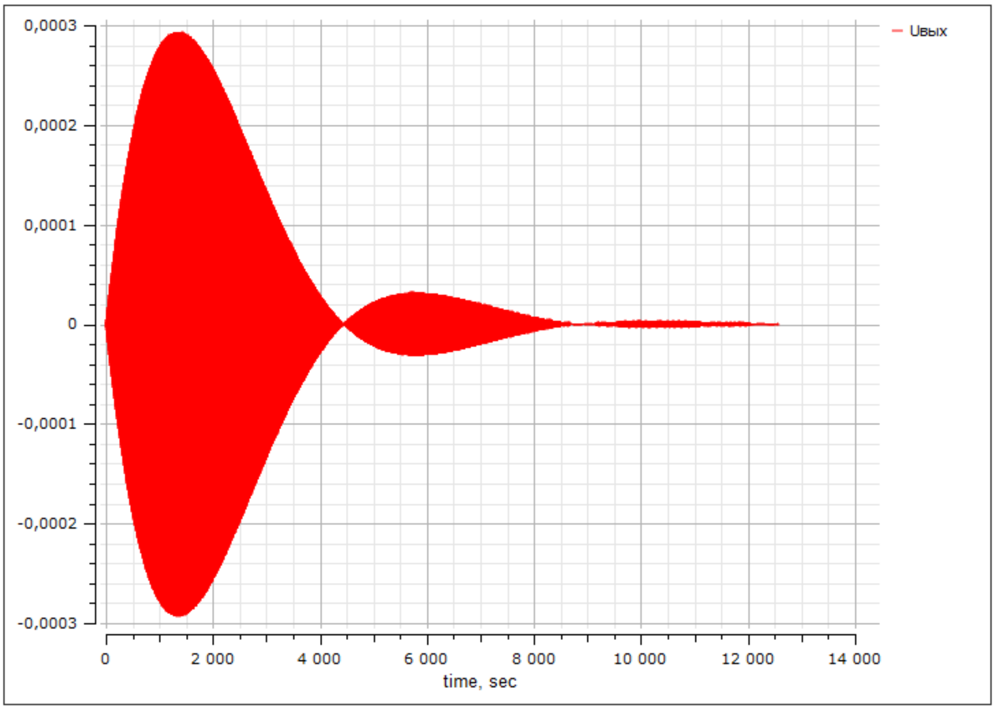

Рис. 4 Решение теста 2 с помощью программы PA10mini.

Стоит отметить, что решение получено при значениях параметров интегрирования по умолчанию, то есть был задан лишь отрезок моделирования.

К примеру, программный комплекс Multisim 7.0 дает неверное решение этой задачи, верное решение может быть получено только после настройки и подбора множества параметров интегрирования в сочетании с выбором определенного метода интегрирования.

Заключение

Разработка программ-решателей систем ОДУ-ДАУ и ЛАУ на языке Си для библиотеки SADEL и разработка ПМК ПА10 (SADEL-PA10)) позволяют сделать следующие выводы.

1. Корректные математические модели динамических процессов в реальных технических системах и объектах желательно получать в расширенном дифференциально-алгебраическом координатном базисе переменных на основе фунда-

ментальных физических законов в форме неоднородных систем ДАУ, не разрешенных относительно производных, и решать эти системы без каких-либо эквивалентных математических преобразований и без обязательного получения "правой" части для производных в явном, аналитическом виде.

2. Для достоверного и точного решения систем ДАУ при невысоких требованиях к математической точности результатов следует использовать только AL-устойчивые методы интегрирования, при использовании других методов интегрирования необходимо гарантировать устойчивость численного решения при увеличении шага интегрирования в случае невысоких значений параметра *eps*.

3. При реализации неявных AL-устойчивых методов решения систем ДАУ необходимо использовать алгоритм Маничева-Ильницкого для устранения «ложных колебаний» и решать системы ЛАУ на каждом шаге интегрирования с гарантированной точностью для всех элементов вектора решений системы ЛАУ при использовании общепринятой в математических вычислениях удвоенной точности вычислений.

Новые научные результаты предполагается получить в направлениях разработки новых высокоэффективных неявных DAbc методов интегрирования с полностью заполненными матрицами D и A в новых системах алгебраических уравнений интегрирования, разработки новых методов и алгоритмов автоматического выбора шага для AL-устойчивых неявных методов интегрирования, новых алгоритмов численно-аналитического почленного вычисления матриц Якоби, а также эффективных алгоритмов и программ решения систем ЛАУ высокой и сверхвысокой размерности с повышенной точностью вычислений.

Литература

1. Евстифеев Ю. А., Маничев В. Б. Эффективный А-устойчивый метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для программ анализа электронных схем//Изв. вузов. Радиоэлектроника.-1986.-Т.29-№ 11. С. 31-35.
2. Маничев В. Б., Глазкова В. Н. Методы интегрирования систем ОДУ для адаптируемых программных комплексов анализа РЭС // Радиотехника.- 1988, №4. С. 88-91.
3. Андронов А.В., Жук Д.М., Кожевников Д.Ю., Маничев В.Б. Библиотека математических программ-решателей на языке Си: SADEL. // http://pa10.ru.
4. Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. // Информационные технологии. - 2010. – часть1 - №7, часть 2 - №8.
5. Маничев В.Б., Жук Д.М., Сахаров М.К. SADEL – Си библиотека для решения алгебраических и дифференциальных уравнений с максимально возможной компьютерной точностью // Информационные технологии. – 2012, №10, С. 7-14.

6. В.Б.Маничев, В.В.Глазкова, Д.Ю.Кожевников, Д.А.Кирьянов, М.К.Сахаров Решение систем линейных алгебраических уравнений с удвоенной точностью вычислений на языке Си. //Вестник МГТУ, сер. Приборостроение. 2011. - Вып. 4. С. 25-36.
7. Guiyou Mao, Linda R. Petzold. Efficient integration over discontinuities for differential-algebraic systems, Computers & Mathematics with Applications, Volume 43, Issues 1–2, January 2002, Pages 65-79.