

УДК 519.622.2

**SADEL – БИБЛИОТЕКА «СВЕРХТОЧНЫХ» РЕШАТЕЛЕЙ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Д.М. Жук, В.Б. Маничев, М.К. Сахаров

МГТУ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

E-MAIL: ZHUK@BMSTU.RU, MANICHEV@BMSTU.RU, MAX.SFN90@GMAIL.COM

Аннотация

Рассмотрены основы и принципы организации библиотеки SADEL на языке Си для «сверхточных» (extra precision) вычислений при решении систем алгебраических и дифференциальных уравнений. Приведены результаты сравнительного тестирования библиотеки.

Bases and principles of the organization of math library SADEL in C language for extra precision calculations for algebraic and differential equations solution are considered. Results of comparative testing of library are resulted.

Ключевые слова: Математическое моделирование, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), методы интегрирования, линейные алгебраические уравнения (ЛАУ).

I. Введение

Библиотека SADEL (Sets of Algebraic and Differential Equations solvers Library – библиотека «сверхточных» (extra precision) решателей для систем алгебраических и дифференциальных уравнений предназначена для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в форме дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) [1].

Для сверхжестких и сверх колебательных классов задач получаемое даже для номинальных значений параметров решение систем ОДУ с помощью известных математических программ иногда сильно отличается от корректного, достоверного и точного решения. Сверхжесткими системами мы называем системы ОДУ со степенью жесткости более 10^6 , которым соответствуют СЛАУ с числом обусловленности более 10^6 , а сверх колебательными системами – системы ОДУ, которые моделируют колебательные системы с добротностью более 10^6 . Главным недостатком вычислительных методов, используемых для анализа динамических процессов при проектировании и управлении и реализованных в лучших зарубежных программных системах, является возможная выдача ошибочных результатов компьютерных вычислений для вышеуказанных классов задач без предупреждения пользователей об их недостоверности. Разработка библиотеки SADEL направлена на устранение указанного недостатка [1,2].

II. Обоснование принципов разработки библиотеки SADEL

Мы отказались от общепринятого приведения систем ОДУ к нормальной форме Коши, разрешенной относительно производных, отказались от явных методов интегрирования систем ОДУ - применяем только неявные методы интегрирования систем ОДУ, отказались от численных эквивалентных преобразований - используем только символьные эквивалентные преобразования и перестановки строк и столбцов матриц коэффициентов при решении СЛАУ. В результате мы получаем только корректные, достоверные и точные результаты решения систем ДАУ и СЛАУ, включая сверхжесткие, сверх колебательные и плохо обусловленные.

Научно-исследовательские работы по численному решению систем ОДУ-ДАУ мы выполняем с 80-х годов. В наших работах было показано, что для гарантии получения качественно корректного и достоверного решения систем ОДУ численный метод решения систем ОДУ должен быть AL-устойчивым, т.е. абсолютно (A) устойчивыми строго в левой (Left) полуплоскости комплексной плоскости устойчивости методов численного решения систем ОДУ. Программная реализация этих методов в конечном итоге сводится к многократному решению соответствующих СЛАУ на каждом шаге численного интегрирования, что, как правило, приводит к нескольким тысячам и более обращений к программе-решателю СЛАУ на всем заданном отрезке численного интегрирования. AL-устойчивые методы 2-го и 4-го порядков точности были реализованы в программе DMAN [2]. Решение большого количества тестовых и практических задач математического моделирования динамических процессов технических систем и объектов с помощью этой программы показало, что для получения качественно корректного решения разнообразных систем ОДУ необходимо на всех шагах численного интегрирования обеспечить решение соответствующих тысяч разнообразных СЛАУ с гарантированной точностью в 15 верных значащих цифр для всех элементов вектора решений СЛАУ, т.е. с удвоенной точностью выполнения простых арифметических операций и элементарных математических функций для типа double представления вещественных чисел алгоритмического языка Си (именно с этой точностью вычисляются все элементы матриц коэффициентов этих тысяч разнообразных СЛАУ). Тестирование показало, что в известных программах-решателях СЛАУ эта задача не решена. Итерационные численные методы решения СЛАУ не решают эту проблему, т.к. не могут гарантировать указанную выше точность получаемых решений для всех элементов вектора решений СЛАУ [3]. Нам удалось решить эту проблему с помощью точных, прямых численных методов решения СЛАУ и методов получения «сверхточных» (extra precision) решений, реализованных в математических пакетах и библиотеках программ: Maple (метод Software Floating Point (SFP метод)), MATLAB (метод Variable Precision Arithmetic (VPA метод)), Mathematica (метод Arbitrary Precision Arithmetic (APA метод)), методы библиотеки Intel для "сверхточных" десятичных вычислений (точность арифметических вычислений до 256 верных десятичных знаков - IEEE 754-2008 Decimal Floating-Point for Intel® Architecture Processors) и др.

III. Результаты сравнительного тестирования решателей СЛАУ-ОДУ-ДАУ

С помощью программ библиотеки SADEL удалось решить с вышеуказанной точностью ряд тестовых плохо обусловленных задач, которые не решаются с данной точностью другими известными решателями СЛАУ из соответствующих библиотек стандартных математических программ [1]. В качестве примера рассмотрим тестовую задачу с матрицей Гильберта (H_i)

10-го порядка [4]: все элементы матрицы A и вектора B , как суммы соответствующих строк матрицы A , были вычислены с удвоенной точностью. Абсолютно точное решение этой задачи – единичный вектор. Результаты решения с удвоенной точностью на языке Си тестовой задачи с матрицей

10-го порядка:

Библиотека MAGMA (LAPACK-Linpack):

1.000000000464697	0.999999960244827	1.000000840984605
0.999992393461859	1.000036137385782	0.999900979283788
1.000162025520190	0.999843779478675	1.000081852296234
0.999982030574678		

Курсивом выделены неверные значащие цифры в решении. Соответствующие программы с полными матрицами из библиотеки SADEL получили единичный вектор для этой тестовой задачи с точностью в 15 верных значащих цифр.

Сравнение решателя систем ДАУ в библиотеке SADEL с аналогичными зарубежными решателями систем ОДУ проведено для параметров интегрирования решателей систем ОДУ, рекомендуемых для этих решателей по умолчанию. Все решатели систем ОДУ сравнивались при заданной относительной точности интегрирования 0.001 (в программном комплексе MATLAB это точность, задаваемая по умолчанию). В таблице приведены результаты сравнения только наиболее трудных для современных решателей ОДУ жестких систем ОДУ с многопериодным решением.

Тесты\Решатели ОДУ	SADEL 2010 Метод M2,M3	Mathcad 2010 Метод Radau	MATLAB 2007 Метод Ode15s	Mathematica 2010 Метод BDF	Maple 2007 Метод Rosenbrock
ТЕСТ 1. Уравнения Ван дер Поля $\mu=10^6$	+	+	+	-	-
ТЕСТ 1. Уравнения Ван дер Поля $\mu=10^9$	+	-	-	-	-
ТЕСТ 2. Высокочастотный фильтр $kt=1, ki=1, ku=0.01$	+	-	-	+	+
ТЕСТ 2. Высокочастотный фильтр $kt=10^{-104}, ku=1, ki=1$	+	-	-	+	-
ТЕСТ 3. Локально-неустойчивая система ОДУ $\mu=10^6$	+	+	-	+	-
ТЕСТ 4. Моделирование свечения лазера	+	+	+	+	-

В таблице сравнивались только методы интегрирования соответствующих решателей систем ОДУ, рекомендуемые в соответствующих математических программных комплексах для решения жестких систем ОДУ. Знак минус означает невозможность получения решения или (в большинстве случаев) качественно неверный результат без всякого предупреждения о возможных ошибках. При значительном увеличении жесткости и значений коэффициентов тестовых систем ОДУ из таблицы соответствующие решатели из сравниваемых программных комплексов дают неверный результат, как правило, без всякого сообщения об ошибке, при этом решатель SADEL дает правильное решение вплоть до максимально допустимой машинной точности.

IV. Заключение

С помощью решателей библиотеки SADEL на обычном персональном компьютере (ОС Win32 XP; компилятор языка Си Visual Studio 2008, версия 9.0.210228) со стандартной удвоенной точностью (double precision) языка Си удалось решить плохо обусловленные СЛАУ с математической компьютерной машинной точностью. Известные программы на языке Си для решения СЛАУ на персональных компьютерах решают с гарантированной математической компьютерной машинной точностью только хорошо обусловленные СЛАУ (число обусловленности матрицы коэффициентов близко к 1 или значения диагональных элементов этой матрицы преобладают по абсолютной величине над недиагональными) и гарантируют не более 5-6 верных значащих цифр для всех элементов вектора решений плохо обусловленных СЛАУ. Также удалось достоверно и точно решить ряд тестовых сверхжестких и сверх колебательных систем ОДУ, которые не решаются известными зарубежными решателями систем ОДУ-ДАУ [1].

Новые научные результаты предполагается получить в направлениях развития новых методов и алгоритмов решения систем ДАУ и СЛАУ сверхбольшой размерности с выполнением расчетов на универсальном и на персональном суперкомпьютерах.

Список литературы

1. Андронов А.В., Жук Д.М., Кожевников Д.Ю., Маничев В.Б. Библиотека математических программ-решателей на языке Си: SADEL. // <http://pa10.ru>.
2. Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. // Информационные технологии. - 2010. – часть 1 - №7, часть 2 - №8.
3. В.Б.Маничев, В.Н.Глазкова, Д.Ю.Кожевников, Д.А.Кирьянов, М.К.Сахаров Решение систем линейных алгебраических уравнений с удвоенной точностью вычислений на языке Си. // Вестник МГТУ, сер. Приборостроение. - 2011. - Вып. 4.
4. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа : учеб. пособие для студ. вузов / — М.: Издательский центр «Академия», 2007. — 320 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).